

7 多目标进化优化

在许多实际问题中，我们常常要处理的数学模型不止有一个目标函数。例如在产品加工与配送系统中，通常要求加工和配送的成本尽可能低，而所花的时间尽可能少，从而使总利润最大。有些多目标优化问题中各个目标之间会有冲突，无法同时取得最优，例如工人的工资和企业的总利润。

以遗传算法为代表的许多进化算法，具有生成多个点并进行多方向搜索的特征，因此非常适合求解这种最优解的搜索空间非常复杂的多目标优化问题。

7.1. 多目标优化问题数学模型及最优解

多目标优化问题是在给定约束条件的前提下，求多个目标函数的最大或最小的问题。一般可表述为如下形式：

$$\begin{aligned} \max \{ & z_1 = f(x), z_2 = f(x), \cdots z_r = f(x) \} \\ \text{s.t. } & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

这里， $z_k = f_k(x), k = 1, 2, \cdots, r$ 是 r 个线性或非线性的目标函数。有的可能是最大化目标函数，有的可能是最小化目标函数。为了方便处理，可以把各目标函数统一换为最小化或最大化。多个目标之间可能会拥有不同的单位，也可能在优化某个目标时损害其他目标。但这并不意味着多目标优化问题可能没有最优解，事实上是可以有的，为了求出比较合理的解，这里引入多目标优化问题的合理解集——Pareto 最优解 (pareto optimal solution)。

7.2. Pareto 最优解

在求解单目标问题时，可以在所有候选解中选出唯一最好的解。但是在多目标优化问题里，由于各个目标之间可能存在冲突，所以最优解不一定只有一个。我们如下定义多目标的最优解：

1) 给定一个多目标优化问题 $\min f(x)$ ，设 $X^* \in \Omega$ ，如果 $\neg \exists X \in \Omega$ ，使得满足以下条件：

对于 $f(x)$ 的任意子目标函数 $f_i(x)$ 都有 $f_i(X) \leq f_i(X^*)$ ，同时至少存在一个子目标函数 $f_i(x)$ 使得 $f_i(X) < f_i(X^*)$

那么，我们称 X^* 是一个**强 Pareto 最优解**。

另外我们还可以定义**弱 Pareto 最优解**：

2) 给定一个多目标优化问题 $\min f(x)$ ，设 $X^* \in \Omega$ ，如果 $\neg \exists X \in \Omega$ ，使得满足以下条件：

对于 $f(x)$ 的任意子目标函数 $f_i(x)$ 都有 $f_i(X) < f_i(X^*)$

那么，我们称 X^* 是一个**弱 Pareto 最优解**。

例如一个两个目标的目标空间：

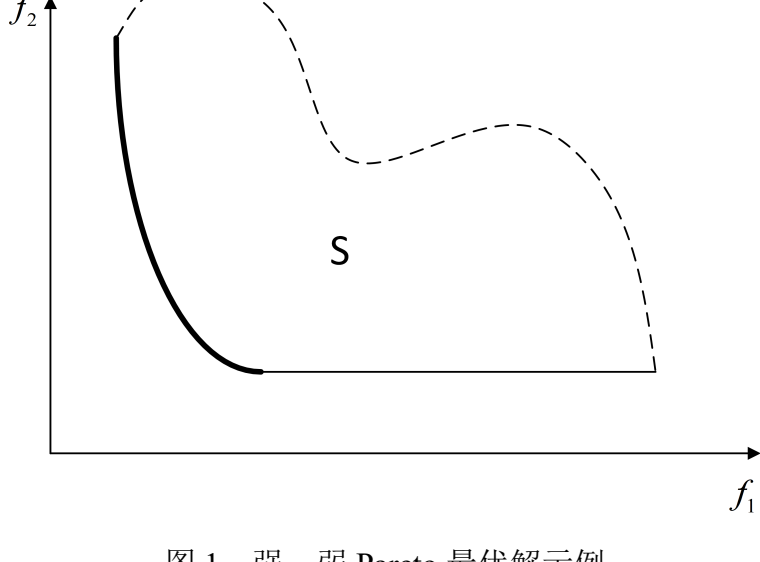


图 1 强、弱 Pareto 最优解示例

由上面的定义可知，在目标空间 S 中强帕累托最优解均落在粗曲线上；弱帕累托最优解则都落在细的直线上。

值得一提的是，我们常常习惯把强 Pareto 最优解简称为 Pareto 最优解。另外，Pareto 最优解又称为“非支配解”。显然若 X^* 是强非支配的，那么它同时也是弱非支配的。下面我们就仔细研究解的支配关系。

7.3. 解的支配关系

设 X_1, X_2 均是解空间 ω 中的解，若对于所有的目标，均有 X_1 比 X_2 好，那么就称 X_1 强支配 X_2 。若对于所有的目标，均有 X_1 不差于 X_2 ，且至少存在一个目标使得 X_1 比 X_2 好，那么就称 X_1 弱支配 X_2 。

一般我们把弱支配关系简称为支配关系。对于上面的 X_1 和 X_2 ，我们称 X_1 是“非强(弱)支配的”或简称“非支配”的， X_2 是“被强(弱)支配”或简称“被支配”的。“非支配”即“不被支配”。非支配是相对的， X_1 对于 X_2 是非支配的，但有可能 X_1 对于 X_3 就是被支配的了。

另外还有一种“不相关”关系。当对于某些目标有 X_1 比 X_2 好，而另外一些目标有 X_2 比 X_1 好，那么 X_1 和 X_2 就是不相关的。

若 X_1 对于解空间中的其他解而言 X_1 都不是被支配的，那么此时 X_1 就是一个帕累托最优解。此时我们就可以把支配关系和帕累托最优解联系起来：

1) 当 X_1 对于解空间中的其他解而言 X_1 都不是被强支配的 (即 X_1 是严格非强支配的)，那么此时 X_1 就是一个弱帕累托最优解。

2) 当 X_1 对于解空间中的其他解而言 X_1 都不是被弱支配的 (即 X_1 是严格非弱支配的)，那么此时 X_1 就是一个强帕累托最优解。

上面的关系很容易混淆一点：“非支配”不是指“不构成支配”，而是指“不被支配”。“非支配”的反义是“被支配”。

7.4. 用进化算法解决多目标优化问题

下面展示一种经典的基于 Pareto 的多目标进化算法的算法流程：

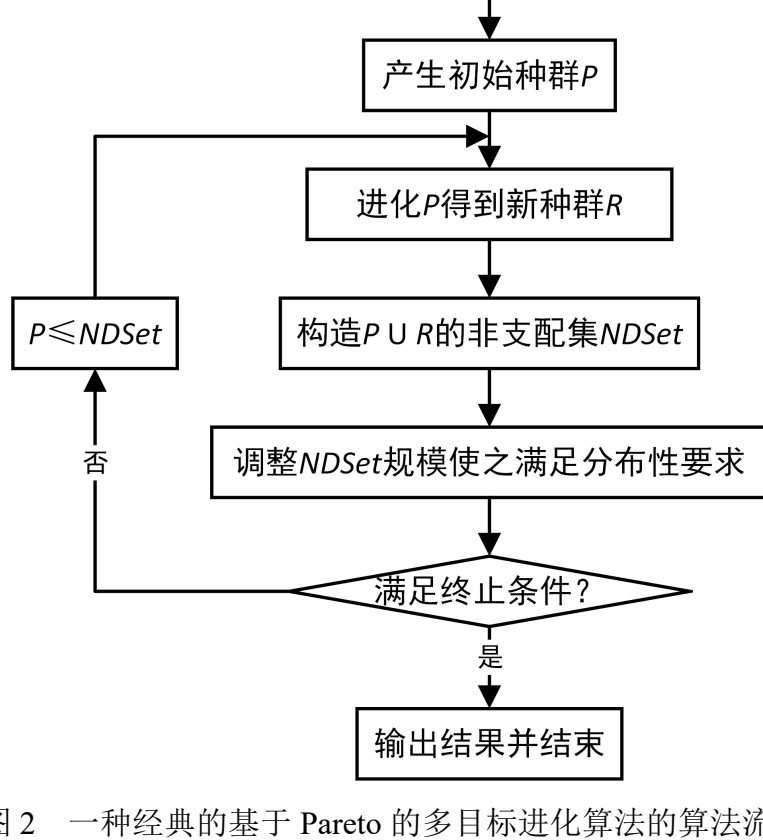


图 2 一种经典的基于 Pareto 的多目标进化算法的算法流程

进化算法如遗传算法、粒子群算法、差分进化算法等都可以很好地解决多目标优化问题。以遗传算法为例，目前具有代表性的多目标优化遗传算法按历史进程分类如下：

1) 第 1 代：帕累托排序法。

向量评价遗传算法 (vector evaluated genetic algorithms, veGA)[1]

2) 第 2 代：非支配排序 + 保持种群多样性。

多目标遗传算法 (Multiobjective Genetic Algorithm, moGA)[2]

非支配排序多目标遗传算法 (non-dominated sorting genetic algorithm, nsGA)[3]

3) 第 3 代：多目标函数加权；改进非支配排序选择；基于分解；基于评价指标；等等。

随机权重遗传算法 (random weight GA, rwGA)[4]

适应性权重遗传算法 (adaptive weight GA: awGA)[5]

Pareto 强度进化算法 II(strength Pareto E A II, spEA-II)[6]

非支配排序遗传算法 II(non-dominated sorting G A II, nsGA-II)[7]

基于超体积作为选择指标的 EMO 进化优化算法 [8]

交互式适应性权重遗传算法 (interactive adaptive weight GA, i-awGA)[9]

基于分解的多目标进化算法 (A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition, MOEA/D)[10]

4) 第 4 代：基于参考点的多目标进化优化算法：

基于非支配排序及参考点的 NSGA III 算法 [11]

由参考向量引导的进化优化算法 (Reference vector guided evolutionary algorithm, RVEA)[12]

实际上，以上划分的界限是不那么明显的，也不存在一种绝对最优、全面领先其他的多目标进化优化算法，各种算法各有优劣，各有擅长之处。除此之外，还有难以数尽的成百上千中改进的多目标进化优化算法，这里就不一一赘述了。

对于一个具体的多目标进化算法 (Multi-objective Evolutionary Algorithm : MOEA) 而言，如何构造非支配集，采用什么策略来调整非支配集的大小，如何提高非支配集中解的分布性和提高收敛速度，是决定其算法性能的重要内容，这些也是当前相关研究的热点。

参考文献

- [1] Schaffer J.D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms[C]. Proceedings of 1st International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, p. 93-100, 1985.
- [2] Fonseca C M, Fleming P J. Genetic algorithms for multiobjective optimization: formulation, discussion and generalization[C]. Proceedings of 5th International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications, pp. 416-423, 1993.
- [3] Srinivas N, Deb K. Multiobjective function optimization using nondominated sorting genetic algorithms[M]. Evolutionary Computation, Chapter 3, pp. 221-248, 1995.
- [4] Ishibuchi H, Murata T. A multiobjective genetic local search algorithm and its application to flowshop scheduling[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 28, no. 3, pp. 392-403, 1998.
- [5] Gen M, Cheng R. Genetic Algorithms and Engineering Optimization[M]. New York, John Wiley & Sons, 2000.
- [6] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization[C]. Proceedings of the EUROGEN Conference, pp. 95-100, 2002.
- [7] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, vol. 6, no. 2, pp. 182-197, 2002.
- [8] Emmerich M, Beume N, Naujoks B. An EMO Algorithm Using the Hypervolume Measure as Selection Criterion[M]// Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [9] Lin L, Gen M. Bicriteria Network Design Problem Using Interactive Adaptive-weight GA and Priority-based Encoding Method[J]. IEEE Trans, on Evolutionary Computation, 2006.
- [10] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A Multiobjective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2008, 11(6):712-731.
- [11] Deb K, Jain H. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach, Part I: Solving Problems With Box Constraints[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2014, 18(4):577-601.
- [12] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. A Reference Vector Guided Evolutionary Algorithm for Many-Objective Optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2016:1-1.